1. Seja M uma matriz real 2x2. Defina uma função f na qual cada elemento da matriz se desloca para a posição seguinte no sentido horário, ou seja, se $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, implica que $f(M) = \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}$. Encontre todas as matrizes simétricas 2x2 reais na qual $M^2 = f(M)$.

Resolução:

Se M é simétrica, então $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$.

Dessa forma, se queremos $M^2 = f(M)$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = b & \text{(i)} \\ ab + bd = a & \text{(ii)} \\ ab + bd = d & \text{(iii)} \\ b^2 + d^2 = b & \text{(iv)} \end{cases}$$

(ii) e (iii) $\Rightarrow a = d$

Portanto, basta resolver: $\begin{cases} a^2 + b^2 = b & \text{(I)} \\ 2ab = a & \text{(II)} \end{cases}$

(II) $\Rightarrow a = 0$ ou $b = \frac{1}{2}$

- Se $a = 0 \Rightarrow b = 0$ ou $b = 1$
- Se $b = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \pm\frac{1}{2}$

Portanto: $\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ ou } M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$

2. Resolva a inequação, onde $x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{9x^2}{\left(1-\sqrt{3x+1}\right)^2} > 4$$

Resolução:

Primeiramente, fazendo a condição de existência, tem-se: $1-\sqrt{3x+1} \neq 0$ e $3x+1 \geq 0$, o que implica $x \neq 0$ e $x \geq -\frac{1}{3}$.

Agora, pode-se fazer:

$$\frac{9x^2}{(1-\sqrt{3x+1})^2} \cdot \frac{(1+\sqrt{3x+1})^2}{(1+\sqrt{3x+1})^2} > 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+\sqrt{3x+1})^2 > 4 \Rightarrow \begin{cases} 1+\sqrt{3x+1} < -2 \\ \text{ou} \\ 1+\sqrt{3x+1} > 2 \end{cases}$$

Como $\sqrt{3x+1} \geq 0$, tem-se que $1+\sqrt{3x+1} < -2$ não convém. Portanto:

$$1+\sqrt{3x+1} > 2 \Rightarrow \sqrt{3x+1} > 1 \Rightarrow x > 0$$

$$\boxed{S = \mathbb{R}_+^*}$$

3. Resolva o sistema de equações, onde $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \log_3(\log_{\sqrt{3}} x) - \log_{\sqrt{3}}(\log_3 y) = 1 \\ \left(y\sqrt[3]{x}\right)^2 = 3^{143} \end{cases}$$

Resolução:

Condição de existência:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ \log_{\sqrt{3}} x > 0 \Rightarrow x > 1 \\ \log_3 y > 0 \Rightarrow y > 1 \end{cases}$$

$$\begin{matrix}(\mathrm{I}) \\ (\mathrm{II})\end{matrix}\begin{cases} \log_3(\log_3 x^2) - \log_3(\log_3 y)^2 = 1 \\ \log_3\left(y^2 \cdot x^{\frac{2}{3}}\right) = 143 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}(\mathrm{I}) \\ (\mathrm{II})\end{matrix}\begin{cases} \log_3\left[\dfrac{\log_3 x^2}{(\log_3 y)^2}\right] = 1 \\ \log_3 y^2 + \log_3 x^{\frac{2}{3}} = 143 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix}(\mathrm{I}) \\ (\mathrm{II})\end{matrix}\begin{cases} \log_3 x^2 = 3 \cdot (\log_3 y)^2 \\ 2\log_3 y + \dfrac{1}{3}\log_3 x^2 = 143 \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), tem-se:

(II) $2\log_3 y + (\log_3 y)^2 = 143$

Tomando $\log_3 y = k$:

$$k^2 + 2k - 143 = 0 \begin{cases} k_1 = 11 \\ k_2 = -13 \text{ (não satisfaz a condição de existência)} \end{cases}$$

Portanto, $\log_3 y = 11 \Rightarrow y = 3^{11}$

Substituindo o valor encontrado em (I):

(I) $\log_3 x^2 = 3\left(\log_3 3^{11}\right)^2 \Rightarrow \log_3 x^2 = 3 \cdot 121 \Rightarrow x = 3^{\frac{363}{2}}$

Portanto, o conjunto solução é: $\boxed{S = \left\{\left(3^{\frac{363}{2}}, 3^{11}\right)\right\}}$

4. Classifique o sistema abaixo como determinado, possível indeterminado e impossível de acordo com os valores reais de *m*.

$$\begin{cases} (m-2)x+2y-z=m+1 \\ 2x+my+2z=m^2+2 \\ 2mx+2(m+1)y+(m+1)z=m^3+3 \end{cases}$$

Resolução:

Para que o sistema seja determinado, precisamos que $D=\begin{vmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2m+2 & m+1 \end{vmatrix}=m^3-3m^2+2m$

seja diferente de zero, ou seja, $m \neq 0$, $m \neq 1$ e $m \neq 2$.

- Agora, se $m = 0$, tem-se:

$$\begin{cases} -2x+2y-z=1 \\ 2x+0y+2z=2 \\ 0x+2y+z=3 \end{cases} \sim \begin{cases} -2x+2y-z=1 \\ 2y+z=3 \\ 0x+0y+0z=0 \end{cases} \Rightarrow \text{Possível indeterminado}$$

- Se $m = 1$, tem-se:

$$\begin{cases} -x+2y-z=2 \\ 2x+y+2z=3 \\ 2x+4y+2z=4 \end{cases} \sim \begin{cases} -x+2y-z=2 \\ 5y=7 \\ 0x+0y+0z=2 \end{cases} \Rightarrow \text{Sistema é impossível}$$

- Se $m = 2$, tem-se:

$$\begin{cases} 0x+2y-z=3 \\ 2x+2y+2z=6 \\ 4x+6y+3z=11 \end{cases} \sim \begin{cases} x+y+z=3 \\ 2y-z=3 \\ 0x+0y+0z=4 \end{cases} \Rightarrow \text{Sistema é impossível}$$

Portanto: $\boxed{\begin{cases} \text{SPD} \Leftrightarrow m \neq 0,\ m \neq 1 \text{ e } m \neq 2 \\ \text{SPI} \Leftrightarrow m = 0 \\ \text{SI} \Leftrightarrow m = 1 \text{ ou } m = 2 \end{cases}}$

5. Sejam os complexos $z = a + bi$ e $w = 47 + ci$, tais que $z^3 + w = 0$. Determine o valor de a, b e c, sabendo que esses números são inteiros e positivos.

Resolução:

Como z = a + bi, então:

$$z^3 = \left(a^3 - 3ab^2\right) + \left(3a^2b - b^3\right)i \quad \text{(I)}$$

Assim, temos, da equação dada:

$$z^3 = -w \Rightarrow z^3 = -47 - ci$$

Por (I):

$$\left(a^3 - 3ab^2\right) + \left(3a^2b - b^3\right)i = -47 - ci$$

Comparando as partes reais e imaginárias:

$$\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = -47 & (1) \\ 3a^2b - b^3 = -c & (2) \end{cases}$$

Da equação (1):

$a\left(a^2 - 3b^2\right) = -47 \rightarrow$ Como $a, b \in \mathbb{Z}_+^*$, então $a|47$.

Daí a = 1 ou a = 47.

Testando as soluções:

i) Para a = 1

$$1\left(1^2 - 3b^2\right) = -47 \Rightarrow 3b^2 = 48 \Rightarrow b = 4$$

Substituindo em (2): $3 \cdot 1^2 \cdot 4 - 4^3 = -c \Rightarrow c = 52$

ii) Para a = 47

$$47\left(47^2 - 3b^2\right) = -47 \Rightarrow 3b^2 - 47^2 = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{2210}{3} \Rightarrow b \notin \mathbb{Z}_+^*.$$

Assim, para a = 47 não há solução nos inteiros.

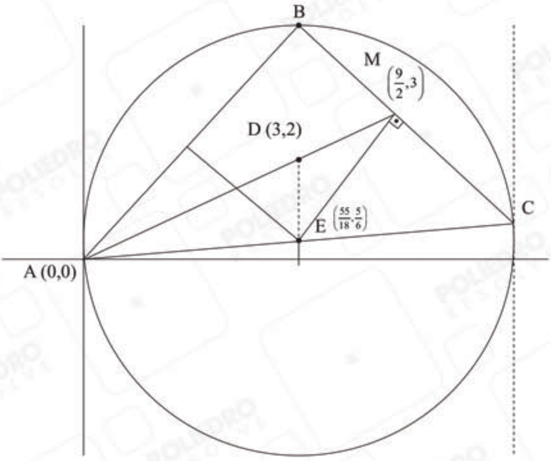
Dessa forma, a única solução é:

$$\boxed{a = 1 \quad b = 4 \quad c = 52}$$

6. Um triângulo ABC tem o seu vértice A na origem do sistema cartesiano, seu baricentro é o ponto D(3,2) e seu circuncentro é o ponto E(55/18,5/6). Determine:

- a equação da circunferência circunscrita ao triângulo ABC;
- as coordenadas dos vértices B e C.

Resolução:



a) Sendo R o raio da circunferência circunscrita, tem-se:

$$R = AE = \sqrt{\left(\frac{55}{18}-0\right)^2+\left(\frac{5}{6}-0\right)^2} = \sqrt{\frac{3250}{324}}$$

Logo, a equação da circunferência circunscrita ao triângulo é:

$$\left(x-\frac{55}{18}\right)^2+\left(y-\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{3250}{324} \quad (1)$$

b) Seja M o ponto médio de $\overline{BC}$. Como D = (3,2) é o baricentro do ΔABC e A, D e M estão alinhados na mediana $\overline{AM}$, com $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, tem-se:

$$M = D+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = (3,\ 2)+\frac{1}{2}(3-0,\ 2-0) = \left(\frac{9}{2},\ 3\right)$$

A reta $\overleftrightarrow{EM}$ é mediatriz de $\overline{BC}$. Portanto, $m_{\overline{BC}} = -\frac{1}{m_{\overline{EM}}} = -\frac{1}{\dfrac{\frac{5}{6}-3}{\frac{55}{18}-\frac{9}{2}}} = -\frac{2}{3}$

Como $M = \left(\frac{9}{2},\ 3\right)$ pertence à reta $\overleftrightarrow{BC}$, a equação de $\overleftrightarrow{BC}$ é dada por

$$y-3 = -\frac{2}{3}\left(x-\frac{9}{2}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x+6 \quad (2)$$

Dado que B e C pertencem à circunferência e à reta $\overleftrightarrow{BC}$, substituindo (2) em (1), tem-se:

$$\left(x-\frac{55}{18}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}x+6-\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{3250}{324} \Leftrightarrow$$

$$\frac{13}{9}x^2-\frac{117}{9}x+\frac{8424}{324} = 0 \Leftrightarrow$$

$x = 3$ ou $x = 6$.

Substituindo na equação da reta $\overleftrightarrow{BC}$:

$$x = 3 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}\cdot 3+6 = 4$$

$$x = 6 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}\cdot 6+6 = 2$$

Portanto, os vértices B e C têm coordenadas $\boxed{(3,\ 4) \text{ e } (6,\ 2)}$.

7. Se $\dfrac{\cos x}{\cos y}+\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y}=-1$, calcule o valor S.

$$S=\frac{3\cos y+\cos 3y}{\cos x}+\frac{3\operatorname{sen} y-\operatorname{sen} 3y}{\operatorname{sen} x}$$

Resolução:

De $\dfrac{\cos x}{\cos y}+\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y}=-1$, tem-se: $\dfrac{\operatorname{sen} y\cdot\cos x+\operatorname{sen} x\cdot\cos y}{\operatorname{sen} y\cdot\cos y}=-1$

$\operatorname{sen}(x+y)=-\operatorname{sen} y\cdot\cos y$ (I)

$\operatorname{sen}(x+y)=-\dfrac{1}{2}\cdot\operatorname{sen}(2y)$ (II)

Das identidades $\begin{cases}\operatorname{sen}(3y)=3\operatorname{sen} y-4\operatorname{sen}^3 y\\ \cos(3y)=4\cos^3 y-3\cos y\end{cases}$, tem-se que $\begin{cases}3\operatorname{sen} y-\operatorname{sen}(3y)=4\operatorname{sen}^3 y\\ 3\cos y+\cos(3y)=4\cos^3 y\end{cases}$, portanto:

$$S=\frac{3\cos y+\cos(3y)}{\cos x}+\frac{3\operatorname{sen} y-\operatorname{sen}(3y)}{\operatorname{sen} x}=\frac{4\cos^3 y}{\cos x}+\frac{4\operatorname{sen}^3 y}{\operatorname{sen} x}=\frac{4\operatorname{sen} x\cdot\cos^3 y+4\operatorname{sen}^3 y\cdot\cos x}{\operatorname{sen} x\cdot\cos x}$$

Sendo N a expressão no numerador de S, tem-se:

$$N=4\operatorname{sen} x\cdot\cos y\cdot\cos^2 y+4\operatorname{sen}^2 y\cdot\operatorname{sen} y\cdot\cos x$$

Da relação fundamental da trigonometria:

$$N=4\operatorname{sen} x\cdot\cos y(1-\operatorname{sen}^2 y)+4(1-\cos^2 y)\cdot\operatorname{sen} y\cdot\cos x$$

$$N=4\operatorname{sen} x\cdot\cos y-4\operatorname{sen} x\cdot\cos y\cdot\operatorname{sen}^2 y+4\operatorname{sen} y\cdot\cos x-4\cos^2 y\cdot\operatorname{sen} y\cdot\cos x$$

$$N=4(\operatorname{sen} x\cdot\cos y+\operatorname{sen} y\cdot\cos x)-4\operatorname{sen} y\cdot\cos y\cdot(\cos x\cdot\cos y+\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{sen} y)$$

$$N=4\operatorname{sen}(x+y)-4\operatorname{sen} y\cdot\cos y\cdot\cos(x-y)$$

Então, da relação (I), tem-se:

$$N=4\operatorname{sen}(x+y)+4\cdot\operatorname{sen}(x+y)\cdot\cos(x-y)$$

Da relação (II) e das relações de prostaferese, tem-se:

$$N=-2\operatorname{sen}(2y)+2\operatorname{sen}(2x)+2\operatorname{sen}(2y)=2\operatorname{sen}(2x)$$

Assim, $S=\dfrac{2\cdot\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen} x\cdot\cos x}=\dfrac{2\cdot 2\cdot\operatorname{sen} x\cdot\cos x}{\operatorname{sen} x\cdot\cos x}$. Portanto: $\boxed{S=4}$

8. Seja $A = \{1,2,3,4\}$.

- Quantas funções de A para A têm exatamente 2 elementos em seu conjunto imagem?
- Entre as 256 funções de A para A, sorteiam-se as funções f e g, podendo haver repetição. Qual a probabilidade da função composta $f \circ g$ ser uma função constante?

Resolução:

- Para responder quantas funções $f: A \to A$ têm $n(\mathrm{Im}_f) = 2$, pode-se dividir o problema em duas partes:
  - Escolher os dois elementos: $C_{4,2}$ possibilidades;
  - Distribuir os dois elementos como imagens de $\{1,2,3,4\}$: $2^4 - 2$.

  Portanto, haverá $C_{4,2} \cdot (2^4 - 2) = \boxed{84 \text{ possibilidades}}$

- Para $f \circ g$ ser constante, é preciso que:

  (I) f seja qualquer e g constante: $256 \cdot 4 = 1.024$ pares de funções.

  (II) $\mathrm{Im}_g = \{a,b\}$, $a \neq b$ e $f(a) = f(b)$: $84 \cdot 4^3 = 5.376$ pares de funções.

  (III) $\mathrm{Im}_g = \{a,b,c\}$, $a \neq b \neq c \neq a$ e $f(a) = f(b) = f(c)$:

  Como há 4 funções constantes, 84 funções com 2 imagens e $4! = 24$ funções com 4 imagens, restam 144 funções com 3 imagens. Logo, $144 \cdot 4^2 = 2304$ pares de funções.

  (IV) $\mathrm{Im}_g = \{1,2,3,4\}$ e f é constante: $24 \cdot 4 = 96$ pares de funções.

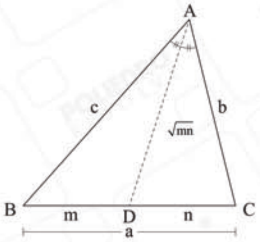
  Assim, $P = \dfrac{8800}{256^2} \Rightarrow \boxed{P = \dfrac{275}{2.048}}$

9. Em um triângulo ABC, a medida da bissetriz interna AD é a média geométrica entre as medidas dos segmentos BD e DC, e a medida da mediana AM é a média geométrica entre os lados AB e AC. Os pontos D e M estão sobre o lado BC da medida *a*. Pede-se determinar os lados AB e AC do triângulo ABC em função de *a*.

Resolução:

Desenhando separadamente cada situação, tem-se:

1) Para bissetriz:



Pelo teorema da bissetriz interna:

$$\frac{c}{m}=\frac{b}{n}\rightarrow\frac{b+c}{\underbrace{m+n}_{a}}=\frac{c}{m}\Rightarrow\frac{b+c}{a}=\frac{c}{m}\Rightarrow m=\frac{ac}{b+c}\quad\text{(I)}$$

Analogamente, $n=\dfrac{ab}{b+c}$. (II)

Pelo teorema de Stewart, tem-se:

$$b^2m+c^2n=m\cdot n\cdot a+(\sqrt{mn})^2\cdot a$$

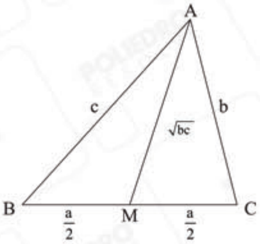
De (I) e (II):

$$\frac{b^2\cdot ac}{(b+c)}+\frac{c^2\cdot ab}{(b+c)}=\frac{ac}{(b+c)}\cdot\frac{ab}{b+c}\cdot a+\frac{ac}{(b+c)}\cdot\frac{ab}{b+c}\cdot a\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2c+c^2b=\frac{a^2bc}{b+c}+\frac{a^2bc}{b+c}\rightarrow bc(b+c)=\frac{2a^2bc}{(b+c)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a^2=(b+c)^2\rightarrow b+c=a\sqrt{2}\quad(1)$$

2) Para a mediana:



Por Stewart:

$$b^2\frac{a}{2}+c^2\frac{a}{2}=\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot a+(\sqrt{bc})^2a\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{b^2+c^2}{2}=\frac{a^2}{4}+bc\Rightarrow$$

$$b^2+c^2-2bc=\frac{a^2}{2}\Rightarrow$$

$$(b-c)^2=\frac{a^2}{2}\Rightarrow|b-c|=\frac{a\sqrt{2}}{2}\quad(2)$$

Assim, das equações (1) e (2):

$$\begin{cases}b+c=a\sqrt{2}\\ |b-c|=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

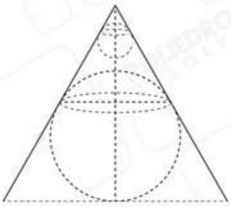
Supondo $b>c$, tem-se:

$$2b=a\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\rightarrow 2b=\frac{3\sqrt{2}}{2}a\Rightarrow b=\frac{3\sqrt{2}}{4}a\rightarrow c=\frac{\sqrt{2}}{4}a$$

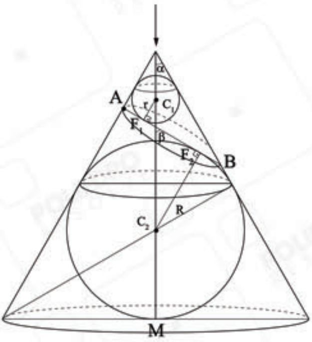
Portanto: $\boxed{\overline{BC}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}a\text{ e }\overline{AB}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}a}$.

Analogamente, se $c>b$, tem-se: $\boxed{\overline{BC}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}a\text{ e }\overline{AB}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}a}$.

10. Em um cone equilátero são inscritas duas esferas de raios $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}R$ e R, conforme a figura abaixo. Um plano secante ao cone é traçado de forma que este seja tangente às duas esferas. Determine em termos de R o maior segmento possível que une dois pontos da curva formada pela interseção do referido plano com o cone.



Resolução:



O plano tangente às duas esferas dadas, de centro C_1 e C_2 e raios r e R, determina uma elipse na sua interseção com o cone. Os focos F_1 e F_2 da elipse são os pontos de tangência do plano com as esferas. O maior segmento possível que une dois pontos da elipse é o eixo maior $\overline{AB}$. Fazendo $AB = 2a$ e $F_1F_2 = 2c$, tem-se:

$\frac{2c}{2a} = e \Rightarrow 2a = \frac{2c}{e}$ (1), em que e é a excentricidade da elipse.

Sendo α o ângulo formado entre as geratrizes do cone e o eixo e β o ângulo formado entre o plano e o eixo, sabe-se que:

$e = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ (2)

Vamos aos cálculos. Tem-se que:

$$\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \Rightarrow r = \left(2-\sqrt{3}\right)R$$

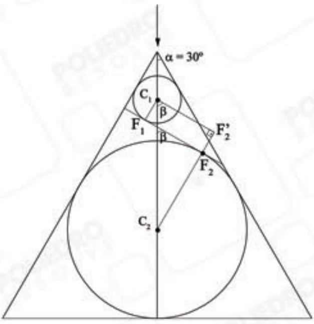
No cone equilátero, a seção meridiana é um triângulo equilátero, sendo C_2 o baricentro. Assim:

$$VC_2 = 2R$$

$$\frac{VC_1}{VC_2} = \frac{r}{R} \Rightarrow \frac{VC_1}{2R} = 2-\sqrt{3} \Rightarrow VC_1 = \left(2-\sqrt{3}\right)\cdot 2R$$

A distância entre os dois centros é dada por:

$$C_1C_2 = VC_2 - VC_1 = 2R - \left(2-\sqrt{3}\right)2R = \left(\sqrt{3}-1\right)2R$$



Transladando o segmento $\overline{F_1F_2}$ até $\overline{C_1F_2}'$, construímos o triângulo retângulo $C_1F_2'C_2$ com

$$C_1C_2 = 2R\left(\sqrt{3}-1\right)$$

$$C_2F_2' = R + r = R + \left(2-\sqrt{3}\right)R = \left(3-\sqrt{3}\right)R$$

$$C_1F_2' = \sqrt{(C_1C_2)^2 - (C_2F_2')^2} = R\sqrt{4-2\sqrt{3}} = R\left(\sqrt{3}-1\right)$$

Como $\overline{F_1F_2} // \overline{C_1F_2}'$, tem-se $C_2C_1F_2' = \beta$ e $2c = F_1F_2 = C_1F_2' = R\left(\sqrt{3}-1\right)$.

Tem-se $\cos\beta = \frac{C_1F_2'}{C_1C_2} = \frac{R\left(\sqrt{3}-1\right)}{2R\left(\sqrt{3}-1\right)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 60^o$

No cone equilátero, o ângulo α entre a geratriz e o eixo é $\alpha = 30^o$. Substituindo em (2):

$$e = \frac{\cos 60^o}{\cos 30^o} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Finalmente, substituindo em (1), obtém-se a distância pedida:

$$2a = \frac{2c}{e} = \frac{R\left(\sqrt{3}-1\right)}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \Rightarrow \boxed{2a = R\left(3-\sqrt{3}\right)}$$